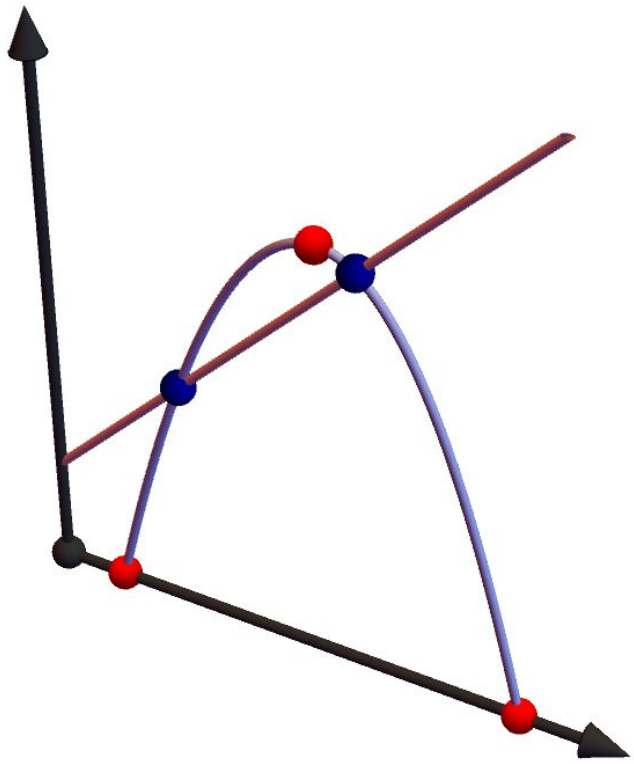
Vom Einsatz der Mathematik in der Physik

Konstant beschleunigte Bewegungen und quadratische Gleichungen



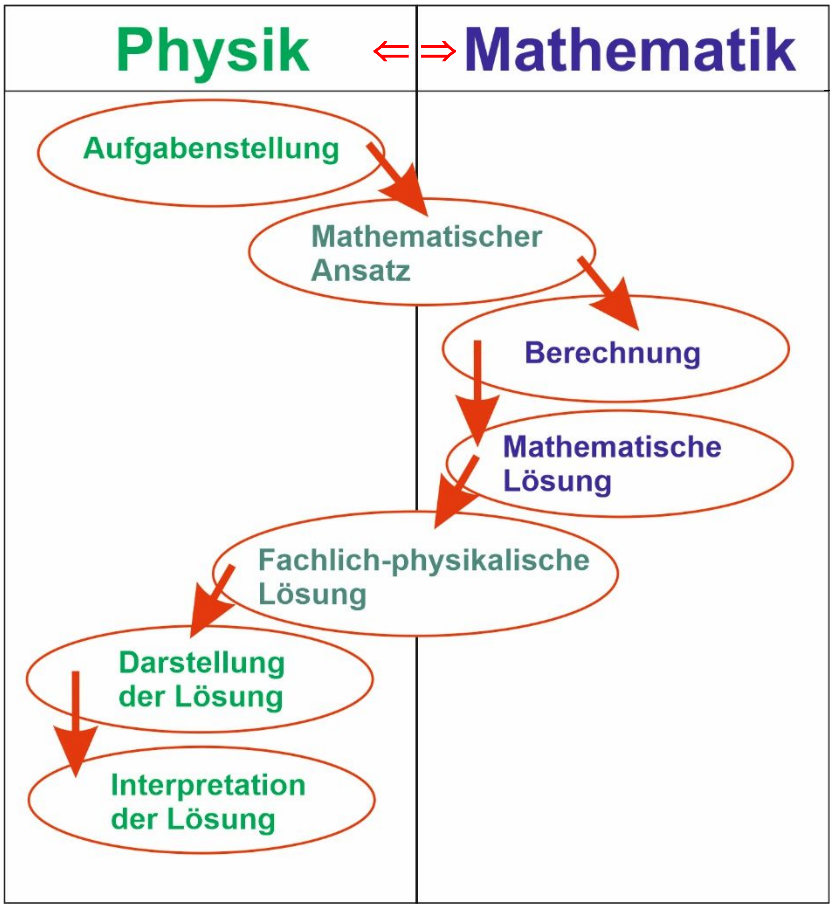
Ein Lernprogramm

Andreas Jäger
PDF erstellt am 21.01.2023

Einführung:

Als exakte Naturwissenschaft setzt die Physik in all ihren Themenbereichen die Mathematik ein – nicht umsonst wird die Mathematik gerne als „Sprache der Natur“ bezeichnet. Beispielsweise hilft Mathematik dem Physiker, physikalische Modelle zu entwerfen und diese experimentell zu überprüfen.

Das folgende Diagramm gibt den typischen Ablauf („*Flow*“) zur Bearbeitung einer physikalischen Aufgabe mit Hilfe der Mathematik wieder:



„Zusammenspiel“ zwischen **Physik** und **Mathematik**

Die Physik stellt die **Aufgabe** ↓

Die Physik erstellt den **mathematischen Ansatz** in Form einer Gleichung ↓

Die Gleichung wird **mathematisch berechnet** ⋯↓

⋯ und gelöst (**mathematische Lösungen**) ↓

Die Physik „überprüft“, welche der mathematischen Lösungen im fachlichen Zusammenhang sinnvoll sind (**physikalische Lösungen**) ↓

Die Physik stellt die **physikalischen Lösungen** dar ⋯↓

⋯ und **interpretiert** sie. ↓

Dieser *Flow* wird in den folgenden Aufgaben möglichst weitgehend eingehalten. Die hierzu gestellten Aufgaben sind durch den Lehrplan-PLUS für Physik abgedeckt und somit auch durchwegs prüfungsrelevant.

In den äußeren Randspalten dieses Dokuments finden Sie zusätzlich zu den Musterlösungen weitere Informationen.

Gelegentlich finden Sie weitere Informationen in der gleichen Schrift (wie die der Randspalten) **im** Text.

Voraussetzungen:

Zur Bearbeitung der Aufgaben in diesem Lernprogramm müssen Sie beherrschen:

- Lösen linearer und quadratischer Gleichungen („Mitternachtsformel“)
- Lösen linearer Gleichungssysteme bis zum Grad 3 (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten)
- Zeichnen von Funktionsgraphen
- Korrektes Rechnen mit physikalischen Einheiten

Auf der *website* **`www.jaeger-salz.de`** (→ **`Mathematik Brückenkurse`**) finden Sie Übungsmaterial, um diese mathematischen Grundlagen im Bedarfsfall zu wiederholen.

Lernprogramm:

Dieses Lernprogramm besteht aus einer Folge von Aufgaben zur geradlinigen Bewegung mit konstanter Beschleunigung. Zur Bearbeitung dieser Aufgaben sind quadratische Gleichungen zu lösen. Der Schwierigkeitsgrad der Aufgaben nimmt von Aufgabe **1** bis Aufgabe **12** zu.

Arbeiten Sie die Aufgaben der Reihe nach selbstständig durch.

Dieses Dokument finden Sie als PDF-Datei (**`Quadratische Gleichungen.pdf`**) auch auf der website **`www.jaeger-salz.de`** (→ **`Physik`** → **`11-01-Kinematik`**)

Es findet im Unterricht eine Einweisung in dieses Lernprogramm statt.

Wiederholung – Quadratische Gleichungen:

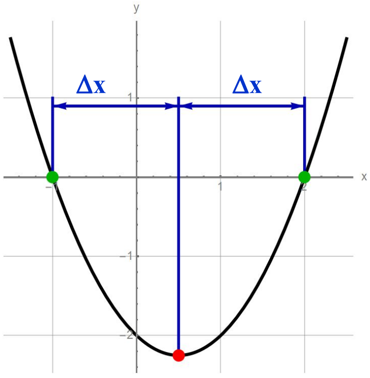
$f(x) = \mathbf{A}(x - x_1)(x - x_2)$ (Linearfaktor-/**Nullstellen**-Form)

$f(x) = \mathbf{A}\,x^2 + \mathbf{B}\,x + \mathbf{C}$ (allgemeine Form)

$f(x) = \mathbf{A}(x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform mit **Scheitelpunkt**)

$\mathbf{A}\,x^2 + \mathbf{B}\,x + \mathbf{C} = 0 \rightarrow$

$$x_{1/2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2} = \frac{-B}{2\,A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \boxed{x_S \pm \Delta x \quad \text{(MNF)}}$$



Diskriminante
$\mathbf{D = B^2 - 4AC}$

> 0:	2 einfache	Nullstellen
$= 0$:	1 doppelte	Nullstelle
< 0:	Keine	Nullstelle

Überlegen Sie sich, warum hier die Koeffizienten A,B und C der quadratuischen Gleichung in **Groß**buchstaben geschrieben wurden.

Mitter**n**achtsf**o**rmel (**MNF**)

Sehen Sie auch in Ihrer **Mathe-Merkhilfe** nach!

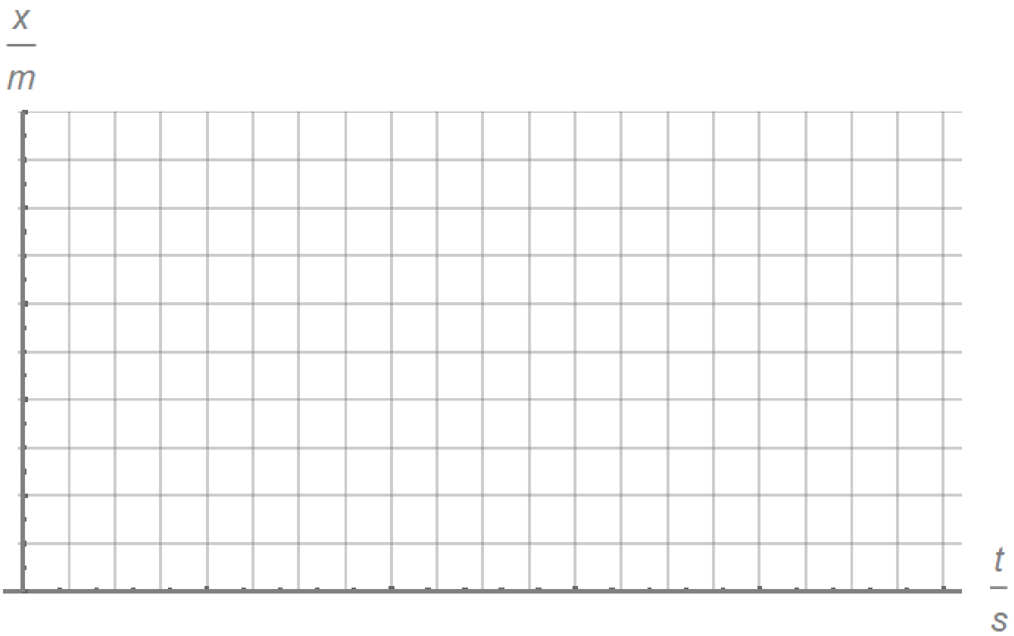
Zeichnen einer Ortskurve:

Die Ortgleichung des bewegten Körpers **1** lautet

$$x_1(t) = 25{,}0\,m + 4{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2$$

Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt t = 1,0 s und ist zum Zeitpunkt t = 4,0 s abgeschlossen ($1{,}0\,s \le t < 4{,}0\,s$).

Zeichnen Sie in das folgende Feld die Ortskurve des Körpers:



← **Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (links) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.**

Verwenden Sie einen Textmarker beim Durchlesen der Aufgaben !

Lösung zu 1

Achten Sie darauf, dass Sie immer **korrekt** mit den **physikalischen Einheiten** umgehen!

Die Ortgleichung des bewegten Körpers **1** lautet

$$x_1(t) = 25{,}0\,m + 4{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

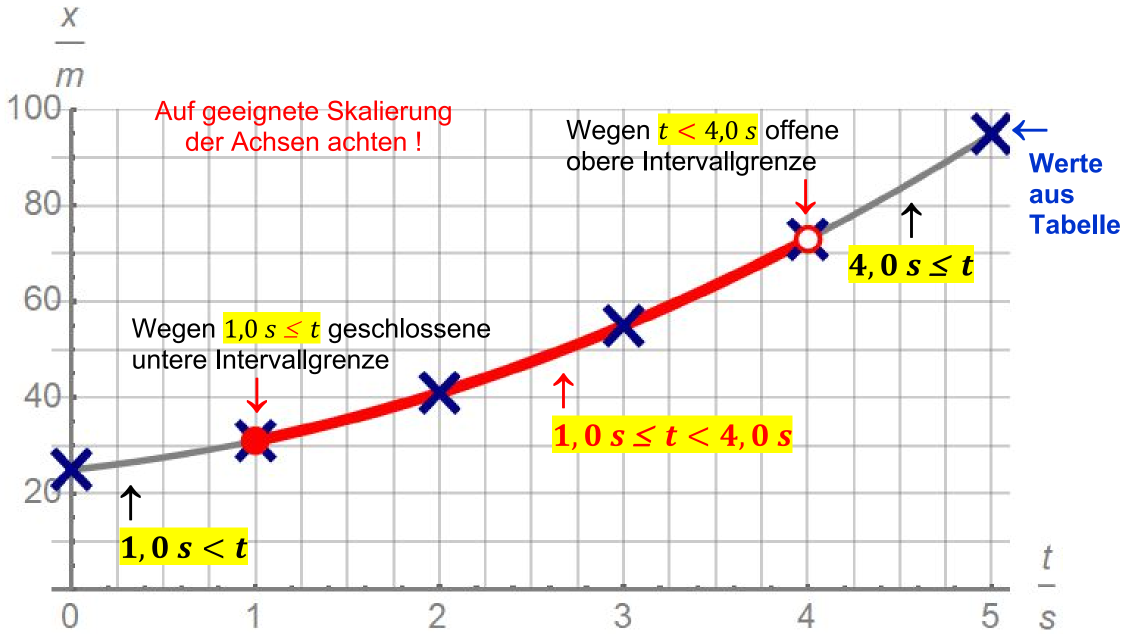
Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt t = 1,0 s und ist zum Zeitpunkt t = 4,0 abgeschlossen ($1{,}0\,s \leq t < 4{,}0\,s$).

Zeichnen Sie in das folgende Feld die Ortskurve des Körpers:

→ Die **Wertetabelle** muss bei Physik-Aufgaben angegeben werden !

$\frac{t}{s}$	$\frac{x}{m}$
0	25
1	31
2	41
3	55
4	73
5	95

$1{,}0\,s \leq t < 4{,}0\,s$ ist der Definitionsbereich $\mathbb{D}$ der Ortsfunktion. $x_1(t)$ sagt **nichts** darüber aus, wie sich der Körper **vor** t=1,0 s und **ab** t=4,0 s bewegt. Es ist daher **nur** die (in der Abbildung rechts) rote Kurve zwischen den beiden Intervallgrenzen (• | ∘) einzuzeichnen, **nicht** jedoch die (hier zur Anschauung trotzdem grau wiedergegebene) Fortsetzung (Extrapolation) der Ortskurve außerhalb des Definitionsbereiches.



!

Definitionsbereich $\mathbb{D}$ einer Ortsfunktion

Punkte in einem t-x-Diagramm

!

Hinweis: In der Regel sind Funktionen in der Physik (wie z.B. die Ortsfunktionen) auf einen bestimmten **Definitionsbereich** $\mathbb{D}$ beschränkt.

Wichtige Begriffsbestimmungen – Achten Sie genau auf folgende Fachausdrücke:

$X(t_T \mid x_T)$	**Punkt** in einem t-x-Diagramm	
t_T	t-Koordinatenwert eines Punktes	– auch **Zeitpunkt** genannt
x_T	x-Koordinatenwert eines Punktes	– auch **Ortspunkt** genannt
$N(0 \mid 0)$	**Nullpunkt** in einem t-x-Diagramm	– **Koordinatenursprung**
x_0	**Startpunkt** in einem t-x-Diagramm	– Abszissenabschnitt der Ortskurve

2

Umkehrfunktion einer Ortsfunktion:

Die Ortgleichung des bewegten Körpers **2** lautet

$$x_2(t) = 10{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt t = 0 und endet nach 5,0 s.

Berechnen Sie, wann sich der Körper um 40,0 m vom Startpunkt aus entfernt hat.

Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein. →

Die Ortgleichung des bewegten Körpers **2** lautet

$$x_1(t) = 10{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2$$

Die Bewegung beginnt zum Zeitpunkt t = 0 und endet nach 5,0 s.

Berechnen Sie, wann sich der Körper um **40 m** vom Startpunkt aus entfernt hat.

$$x_1(t) = \mathbf{10\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2 = 40\,m + 10\,m = 50\,m} = x_T$$

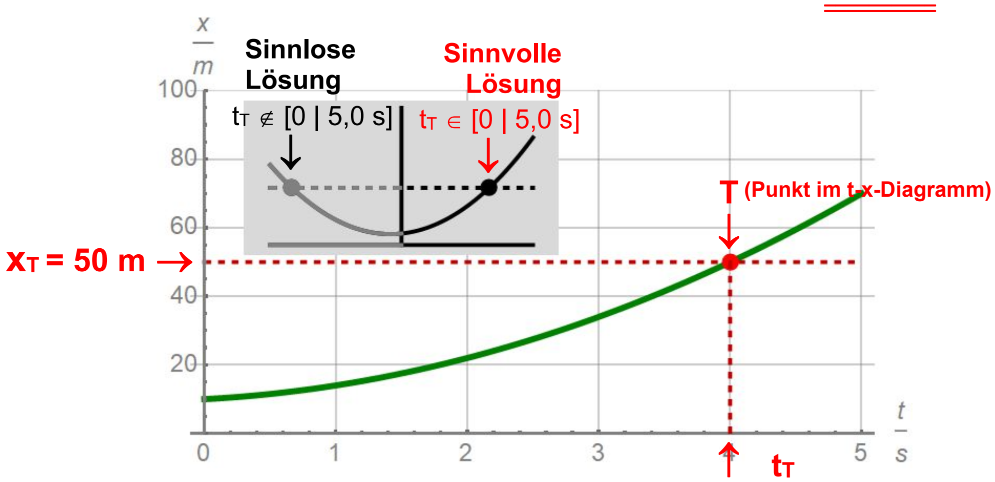
$$\mathbf{-40\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2 = 0}$$

$$\mathbf{2{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2 + 2{,}0\,\frac{m}{s}\,t - 40\,m = 0}$$

Achten Sie auf die Farbkodierungen
(nur in Farbausdrucken)

$$t_{1/2} \rightarrow \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\,A\,C}}{2\,A} = \frac{-2{,}0\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{4{,}0\,\frac{m^2}{s^2} - 4 \cdot 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,(-40\,m)}}{4{,}0\,\frac{m}{s^2}} =$$

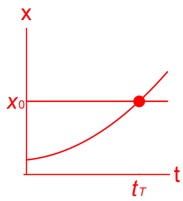
$$\frac{-2{,}0\,\frac{m}{s} \pm \sqrt{324\,\frac{m^2}{s^2}}}{4{,}0\,\frac{m}{s^2}} = \frac{-2{,}0\,\frac{m}{s} \pm 18\,\frac{m}{s}}{4{,}0\,\frac{m}{s^2}} = \begin{cases} -5{,}0\,s\ (\notin [0\,|\,5{,}0\,s]) \\ \underline{\underline{4{,}0\,s = t_T}} \end{cases}$$



Lösung zu 2

$\mathbb{D} = [0s\,|\,5{,}0s]$

Tip:
Fertigen Sie eine **Skizze** von $x_2(t)$ an. Sie wissen:
- $x_0 > 0$
- $v_0 > 0$
- $a > 0$



Zum Einsatz der **Mitternachts-formel**:

- Rechnen Sie zuerst immer **alle** Lösungen aus.
- Überprüfen Sie **erst dann**, welche Lösungen einen physikalischen Sinn ergeben.

Punkte in einem t-x-Diagramm haben physikalische Einheiten – z.B. **T(4,0 s| 50 m)**

←
Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Umkehrfunktion einer Ortsfunktion:

Körper **3** startet zum Zeitpunkt t = 0 und bewegt sich entlang der x-Achse. Die Ortsgleichung lautet:

$$x_3(t) = 35{,}0\,\frac{m}{s}\,t - 5{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

Die Bewegung endet, wenn sich Körper 3 wieder am Ausgangspunkt befindet.

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_T sich der Körper **30 m** vom Koordinatenursprung entfernt befindet.

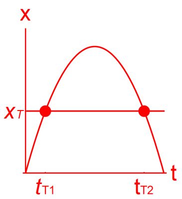
←
Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (links) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.

Lösung zu 3

Aus der Aufgabenstellung ergibt sich: **t ≥ 0 s.**

Zeitpunkt: t-Wert (t-Koordinatenwert) eines Punktes

Auch hier hilft wieder eine kleine Skizze:



Aus dieser Skizze geht hervor, dass sich beide Schnittpunkte T_1 und T_2 innerhalb des Definitionsbereiches (der Zeit) befinden.

→

Graphik rechts **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Körper **3** startet zum Zeitpunkt t = 0 und bewegt sich entlang der x-Achse. Die Ortsgleichung lautet:

$$x_3(t) = 35{,}0\ \frac{m}{s}\ t - 5{,}0\ \frac{m}{s^2}\ t^2$$

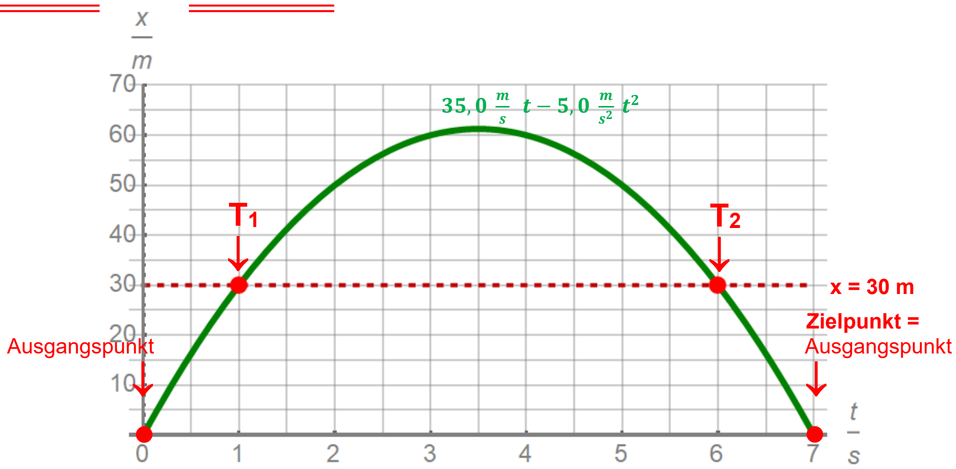
Ausgangspunkt: Ortspunkt zum Zeitpunkt t = 0 ↓

Die Bewegung endet, wenn sich Körper 3 wieder am Ausgangspunkt befindet.

Berechnen Sie, zu welchem Zeitpunkt t_T sich der Körper um **30 m** vom Koordinatenursprung aus befindet.

$$35{,}0\ \frac{m}{s}\ t - 5{,}0\ \frac{m}{s^2}\ t^2 = x_T = 30\ m \ \rightarrow \text{(MNF)}$$

$t_{T1} = 1{,}0\ s$ und $t_{T2} = 6{,}0\ s$



Schnittpunkt zweier Ortsfunktionen:

Zwei Körper **4a** und **4b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{4a}(t) = 10{,}0\ m + 2{,}0\frac{m}{s}\ t + \ 2{,}0\frac{m}{s^2}\ t^2$$

und

$$x_{4b}(t) = \ 100{,}0\ m\ - 20{,}0\ \frac{m}{s} t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Berechnen Sie alle Zeitpunkte und die entsprechenden Ortspunkte des Treffens.

→

Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.

Zwei Körper **4a** und **4b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{4a}(t) = 10{,}0\,m + 2{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2$$

und

$$x_{4b}(t) = 100{,}0\,m - 20{,}0\,\frac{m}{s}t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

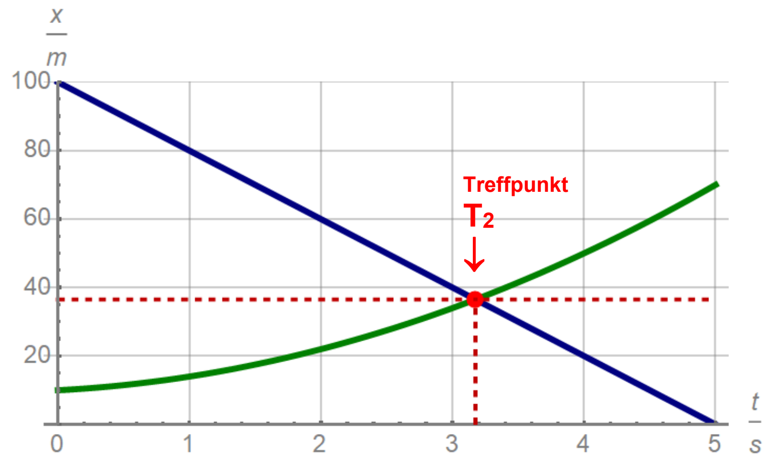
Berechnen Sie alle Zeitpunkte und die entsprechenden Ortspunkte des Treffens.

$$x_{4a}(t) = 10\,m + 2{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2 = 100\,m - 20\,\frac{m}{s}t = x_{4b}(t) \rightarrow$$

$$-90\,m + 22{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2 = 0 \rightarrow$$

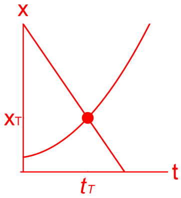
$t_{T1} < 0$ $t_{T1} = \cancel{-14{,}174\,s}$ und $t_{T2} = 3{,}1746\,s = \underline{\underline{3{,}2\,s}}$

$$x_T = x_{4a}(t_{T2}) = x_{4b}(t_{T2}) = 36{,}5065\,m = \underline{\underline{37\,m}}$$



Lösung zu 4

Skizze:



t_{T1} liegt **außerhalb** des festgelegten Zeitbereiches von $t \geq 0$ s und ist somit **keine Lösung der Aufgabe.**

Achten Sie auf die Aufgabenstellung: Gefragt ist nach den Zeit- **und** den Ortspunkten des Treffens !

← Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Schnittpunkt zweier Ortsfunktionen:

Zwei Körper **5a** und **5b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = –5,0 s mit den Ortsgleichungen

$$x_{5a}(t) = 10{,}0\,m + 2{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2$$

und

$$x_{5b}(t) = 100{,}0\,m - 4{,}0\,\frac{m}{s}t - 6{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Berechnen Sie die Zeitpunkte und Ortspunkte des Treffens.

← Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (links) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.

Lösung zu 5

Zwei Körper **5a** und **5b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = –5,0 s mit den Ortsgleichungen

$$x_{5a}(t) = 10{,}0\,m + 2{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2$$

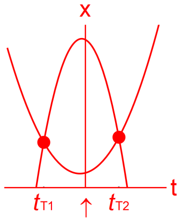
und

$$x_{5b}(t) = 100{,}0\,m - 4{,}0\,\frac{m}{s}t - 6{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Berechnen Sie die Zeitpunkte und Ortspunkte des Treffens.

Skizze:



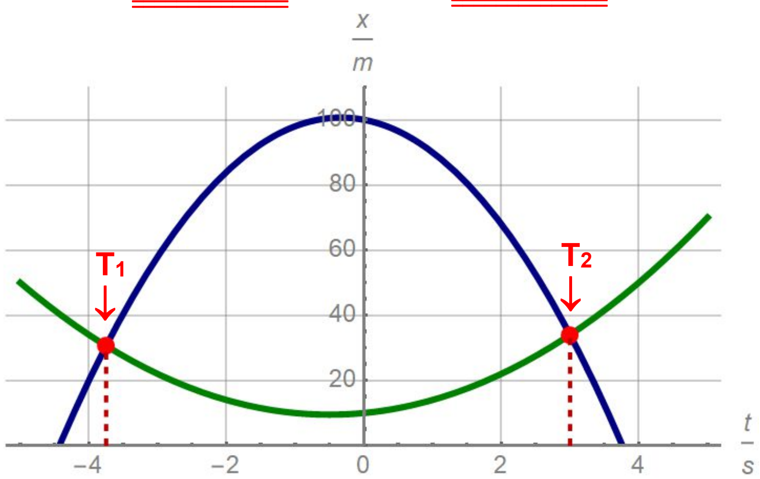
Treffen: „Gleicher Ort zur gleichen Zeit“ !

Treffpunkt: Schnittpunkt zweier Ortskurven in einem t-x-Diagramm.

$$x_{5a}(t) = 10\,m + 2{,}0\frac{m}{s}\,t + 2{,}0\frac{m}{s^2}\,t^2 = 100\,m - 4{,}0\,\frac{m}{s}t - 6{,}0\,\frac{m}{s^2}t^2 = x_{5b}(t) \rightarrow$$

$$\underline{\underline{t_{T1} = -3{,}8}} \rightarrow x_{T1} = 30{,}625\,m = \underline{\underline{31\,m}}$$

$$\underline{\underline{t_{T2} = 3{,}0\,s}} \rightarrow \underline{\underline{x_{T2} = 34{,}0\,m}}$$



2 Lösungen !

→ Graphik rechts **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Auswertung der Diskriminanten:

Zwei Körper **6a** und **6b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{6a}(t) = 20{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

und

$$x_{6b}(t) = 15{,}0\,\frac{m}{s}t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Berechnen Sie alle Zeitpunkte des Treffens.
Berechnen Sie die Diskriminante in der „Mitternachtformel“ (MNF).
Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

→ **Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.**

Zwei Körper **6a** und **6b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{6a}(t) = 20{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2$$

und $$x_{6b}(t) = 15{,}0\,\frac{m}{s}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Ermitteln Sie alle Zeitpunkte des Treffens.
Berechnen Sie die Diskriminante ***D*** in der „Mitternachtformel“ (MNF).
Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

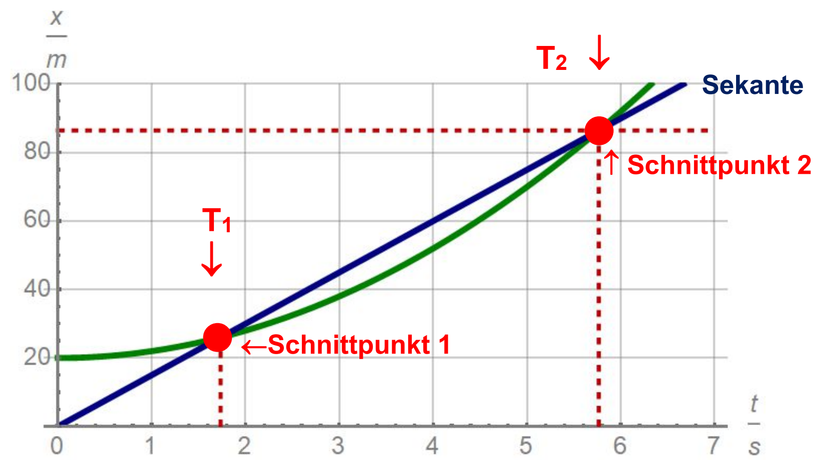
Lösung zu 6

$$x_{6a}(t) = \mathbf{20\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2} = \mathbf{15{,}0\,\frac{m}{s}\,t} = x_{6b}(t) \rightarrow$$

$$\mathbf{2{,}0}\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - \mathbf{15{,}0}\,\frac{m}{s}\,t + \mathbf{20\,m} = 0 \;\rightarrow\; \text{(MNF)}\;\; \underline{\underline{\mathbf{t_{T1} = 1{,}7\,s}}} \;\text{ und }\; \underline{\underline{\mathbf{t_{T2} = 5{,}8\,s}}}$$

$$\text{Diskriminante}\;\; \boldsymbol{D} = \mathbf{B^2 - 4\,A\,C} = \underline{\underline{\mathbf{65}}}\,\frac{m^2}{s^2} \underline{\underline{> \mathbf{0} \;\rightarrow\; \textbf{2 Lösungen}}}$$

Interpretation: **Zuerst** überholt Körper **7b** Körper **7a** (**T**$_1$),
später überholt Körper **7a** Körper **7b** (**T**$_2$):
Es handelt sich hier um **zwei <u>Überhol</u>**vorgänge.



Die für die MNF üblichen Parameter a, b und c (in Kleinbuchstaben) wurden hier durch die entsprechenden **Groß**buchstaben A, B und C ersetzt, um nicht das kleine a aus der MNF mit mit dem Symbol a für die Beschleunigung zu verwechseln.

Überholen: Schnittpunkt zweier Ortskurven

←
Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

<u>Auswertung der Diskriminanten:</u>

Zwei Körper **7a** und **7b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{7a}(t) = 20{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \qquad \text{und} \qquad x_{7b}(t) = 10{,}0\,\frac{m}{s}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

←
Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (links) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.

Lösung zu 7

Zwei Körper **7a** und **7b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{7a}(t) = 20{,}0\,m + 2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \qquad \text{und} \qquad x_{7b}(t) = 10{,}0\,\frac{m}{s}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

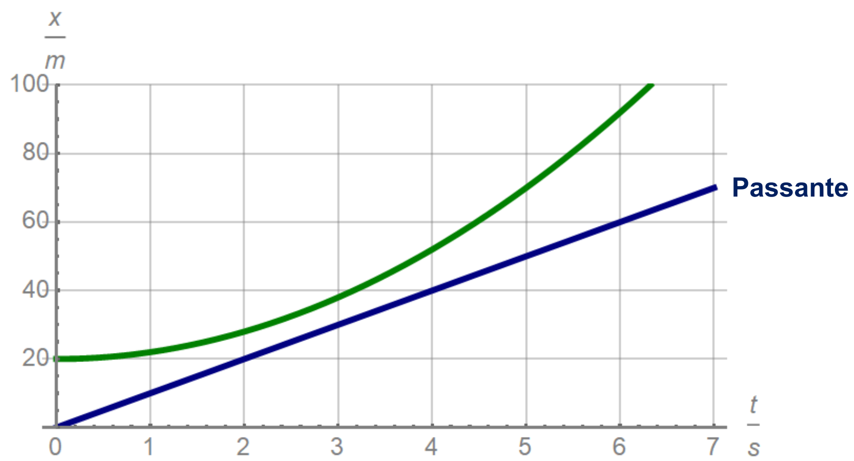
Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

$$2{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 10{,}0\,\frac{m}{s}\,t + 20\,m = 0$$

$$\text{Diskriminante } D = B^2 - 4\,A\,C = \underline{\underline{-60}}\,\frac{m^2}{s^2} < 0 \rightarrow \underline{\underline{\;0 \text{ Lösungen}}}$$

Interpretation: Körper **7a** kann Körper **7b** nie überholen und
bleibt somit immer hinter **7a**.

→ Graphik rechts **nicht** in Aufgabenstellung gefragt



8

Auswertung der Diskriminanten:

Zwei Körper **8a** und **8b** bewegen sich ab dem Zeitpunkt t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{8a}(t) = 20\,m + 5{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \qquad \text{und} \qquad x_{8b}(t) = 20{,}0\,\frac{m}{s}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

→ **Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.**

Zwei Körper **8a** und **8b** bewegen sich ab t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{8a}(t) = 20\,m + 5,0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \qquad \text{und} \qquad x_{8b}(t) = 20,0\,\frac{m}{s}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn.

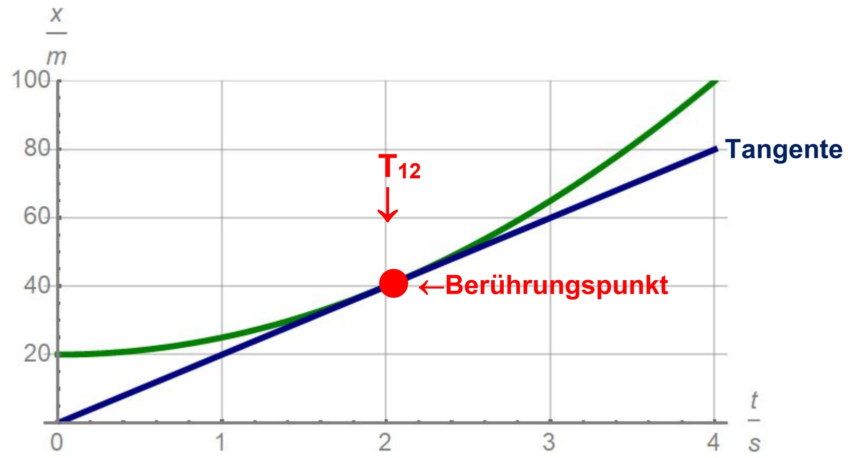
Stellen Sie einen Zusammenhang zwischen der Diskriminanten und der Anzahl der Lösungen her (mit Begründung).
Interpretieren Sie die Anzahl der Lösungen im fachlichen Zusammenhang.

Lösung zu 8

$$5,0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - 20,0\,\frac{m}{s}\,t + 20\,m = 0$$

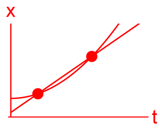
$$\text{Diskriminante } \boldsymbol{D} = \mathrm{B}^2 - 4\,\mathrm{A}\,\mathrm{C} = \underline{\underline{\mathbf{0}}}\,\frac{m^2}{s^2} = \mathbf{0} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{1\ Lösung}}}$$

Interpretation: Körper **8b** erreicht Körper **8a**, kann dieser aber **nicht überholen**:
Körper **8b** **holt** Körper **8a** **ein**.
Da sich **8b** mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, **8a** aber beschleunigt, wird der Abstand zwischen **8b** und **8a** nach dem Einholen wieder größer.

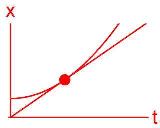


Einholen: Berührungspunkt zweier Ortskurven.

Unterscheiden Sie (auch **sprachlich !**) zwischen **Schnittpunkt** –



– und **Berührungspunkt** –



!

←
Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Berechnung der Diskriminanten:

Zwei Körper **9a** und **9b** bewegen sich ab t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{9a}(t) = 100\,m + 4,0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \qquad \text{und} \qquad x_{9b}(t) = v_{0b}\,t$$

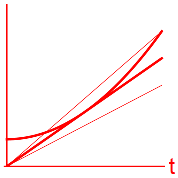
auf einer geradlinigen Bahn (v_{0b} = const.).

Berechnen Sie v_{9b} so, dass Körper **9a** von Körper **9b** **ein**geholt, aber **nicht über**holt wird.

←
Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.

Lösung zu 9

Vielleicht hilft hier wieder eine kleine **Skizze** weiter:



!

Sie erhalten hier **zwei rechnerische Lösungen** für die gesuchte Geschwindigkeit des Betrages v_{9b}.

↓

Sie müssen überprüfen, welche der beiden rechnerischen Lösungen für v_{9b} auch **physikalisch einen Sinn** macht

!

Graphik rechts **nicht** in Aufgabenstellung gefragt →

Zwei Körper **9a** und **9b** bewegen sich ab t = 0 mit den Ortsgleichungen

$$x_{9a}(t) = 100\,m + 4{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 \quad \text{und} \quad x_{9b}(t) = v_{9b}\,t$$

auf einer geradlinigen Bahn (v_{9b} = const.).

Berechnen Sie v_{9b} so, dass Körper **9a** von Körper **9b** **eingeholt**, aber **nicht überholt** wird.

$$100\,m + 4{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 = v_{9b}\,t \;\rightarrow\; 4{,}0\,\frac{m}{s^2}\,t^2 - v_{9b}\,t + 100\,m = 0$$

$$\text{Diskriminante } D = B^2 - 4\,A\,C = v_{9b}{}^2 - 4\cdot 4{,}0\,\frac{m}{s^2}\,100\,m = 0 \rightarrow$$

$$v_{9b1} = -40\,\frac{m}{s}$$

$$v_{9b2} = +40\,\frac{m}{s}$$

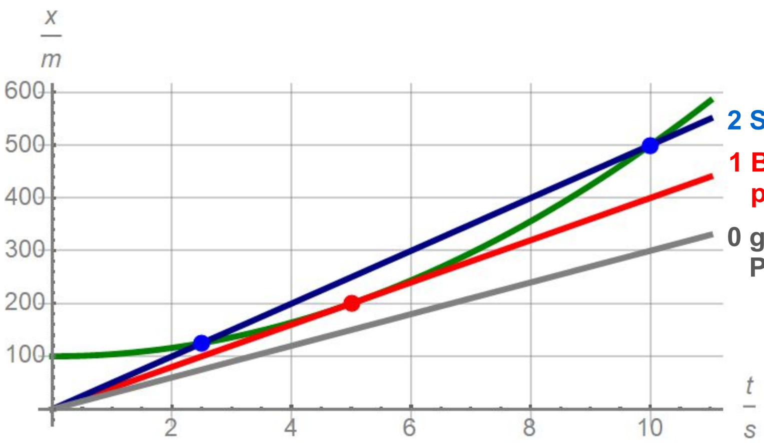
?

Frage:
Welche der beiden berechneten Geschwindigkeiten gehört zur Lösung **?**

Antwort:

$$v_{9b1} = -40\,\frac{m}{s} \rightarrow t_{T1} = \frac{-40\,\frac{m}{s}}{2\cdot 4{,}0\,\frac{m}{s^2}} = -5{,}0\,s \ngeq 0\,s \quad \textbf{keine Lösung}$$

$$\underline{\underline{v_{9b2} = +40\,\frac{m}{s}}} \rightarrow t_{T2} = \frac{+40\,\frac{m}{s}}{2\cdot 4{,}0\,\frac{m}{s^2}} = +5{,}0\,s \geq 0\,s \quad \textbf{Lösung}$$



2 Schnittpunkte $v_0 = +50\,\frac{m}{s}$

1 Berührungspunkt $v_0 = +40\,\frac{m}{s}$

0 gemeinsame Punkte $v_0 = +30\,\frac{m}{s}$

10 Bewegungsgrößen aus Ortspunkten berechnen:

Körper **10** bewegt sich mit konstanter, unbekannter Beschleunigung des Betrages a, unbekannter Anfangsgeschwindigkeit des Betrages v_0 und unbekanntem Startpunkt x_0 entlang einer x-Achse. Durch Messungen wird ermittelt, dass sich zum Startzeitpunkt t = 0 der Körper am Ortspunkt x = 50 m befindet. Nach einer Sekunde ist er 53 m und 4 Sekunden nach dem Start 98 m vom Koordinatenursprung entfernt.

Berechnen Sie a, v_0 und x_0 und
geben Sie als Ergebnis die Ortsgleichung dieser Bewegung mit eingesetzten Werten **an**.

Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein. →

Körper **10** bewegt sich mit konstanter, unbekanner Beschleunigung des Betrages a, unbekannter Anfangsgeschwindigkeit des Betrages v_0 und unbekanntem Startpunkt x_0 entlang einer x-Achse. Durch Messungen wird ermittelt, dass sich zum Startzeitpunkt t = 0 der Körper am Ortspunkt x = 50 m befindet. Nach einer Sekunde ist er 53 m und 4 Sekunden nach dem Start 98 m vom Koordinatenursprung entfernt.

Berechnen Sie a, v_0 und x_0 und
geben Sie als Ergebnis die Ortsgleichung dieser Bewegung mit eingesetzten Werten **an**.

Lösung zu 10

Solche Aufgaben, in denen aus Eigenschaften einer **Ortskurve** rechnerisch auf die **Ortsgleichung** geschlossen werden soll, werden in der Mathematik auch als **„Steckbrief-aufgaben"** bezeichnet.

$$x_{10}(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

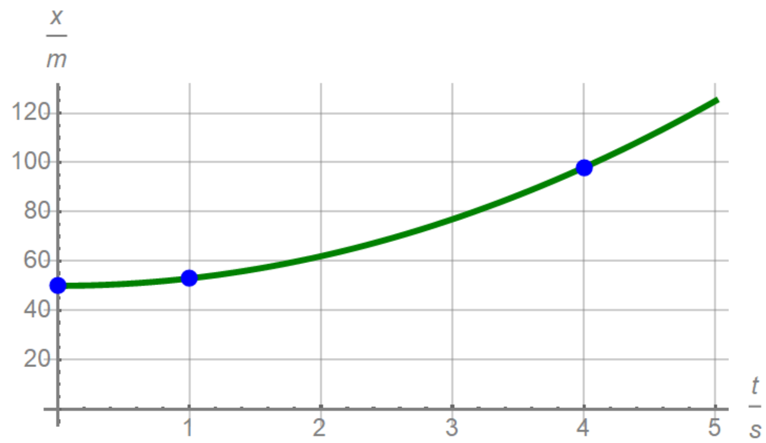
$$x_{10}(0) = 50\text{ m} \qquad x_0 = 50\,m \qquad 0$$

$$x_{10}(1s) = 53\text{ m} \qquad \frac{1}{2}a\,(1s)^2 + v_0 \cdot 1\text{s} + 50\text{m} = 53\,m \qquad \text{I}$$

$$x_{10}(4s) = 98\text{ m} \qquad \frac{1}{2}a\,(4s)^2 + v_0 \cdot 4\text{s} + 50\text{m} = 98\,m \qquad \text{II}$$

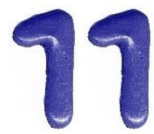
Gleichungen I und II bilden ein **lineares Gleichungssystem** mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten (a und v_0). Das Ergebnis aus Gleichung 0 (x_0 = 50 m) wurde dabei bereits in die beiden anderen Gleichungen eingesetzt.

Ergebnis: $a = 6{,}0\ \frac{m}{s^2},\quad v_0 = 0,\quad x_0 = 50\,m \rightarrow \underline{\underline{x_{10}(t) = 50\text{ m} + 3{,}0\ \frac{m}{s^2}\, t^2}}$



← Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Bewegungsgrößen aus Ortspunkten berechnen:



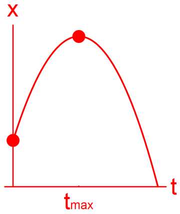
Körper **11** bewegt sich mit konstanter, unbekanner Beschleunigung des Betrages a, unbekannter Anfangsgeschwindigkeit des Betrages v_0 und unbekanntem Startpunkt x_0 entlang einer senkrecht nach oben gerichteten x-Achse. Durch Messungen wird ermittelt, dass sich zum Startzeitpunkt t = 0 der Körper am Ortspunkt x = 20 m befindet und wird nach oben geworfen. Nach 3,0 s hat Körper 11 seine maximale Höhe bei x = 65 m erreicht, danach fällt er wieder nach unten.

Berechnen Sie a, v_0 und x_0 und
geben Sie als Ergebnis die Ortsgleichung dieser Bewegung mit eingesetzten Werten **an**.

← **Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (links) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.**

Lösung zu 11

Skizze:



Körper **11** bewegt sich mit konstanter, unbekanner Beschleunigung des Betrages a, unbekannter Anfangsgeschwindigkeit des Betrages v_0 und unbekanntem Startpunkt x_0 entlang einer senkrecht nach oben gerichteten x-Achse. Durch Messungen wird ermittelt, dass sich zum Startzeitpunkt t = 0 der Körper am Ortspunkt x = 20 m befindet und wird nach oben geworfen. Nach 3,0 s hat Körper **11** seine maximale Höhe bei x = 65 m erreicht, danach fällt er wieder nach unten.

Berechnen Sie a, v_0 und x_0 und
geben Sie als Ergebnis die Ortsgleichung dieser Bewegung mit eingesetzten Werten **an**.

$$x_{11}(t) = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}\, a\, t^2$$

$x_{11}(0) = 20\ \mathrm{m}$	$x_0 = 20\ m$		0
$x_{11}(3s) = 65\ \mathrm{m}$	$\frac{1}{2}\, a\, (3s)^2 + v_0 \cdot 3s + 20\mathrm{m} = 65\ m$		I
$\frac{-B}{2A} = -\frac{v_0}{a} = 3\ \mathrm{s}$	$3s \cdot a + v_0 = 0$		II

Gleichungen **I** und **II** bilden ein **lineares Gleichungssystem** mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten (a und v_0). Das Ergebnis aus Gleichung 0 (x_0 = 20 m) wurde dabei bereits in Gleichung **I** eingesetzt. Gleichung **II** ergibt sich aus dem Teil der MNF, der die Scheitelstelle einer Parabel berechnet.

Ergebnis: $a = -10\ \frac{m}{s^2}$, $v0 = 30\ \frac{m}{s}$ $\rightarrow$ $x_{11}(t) = 20\ m + 30\ \frac{m}{s}\, t - \frac{1}{2}\, 10\ \frac{m}{s^2}\, t^2$

12

Bewegungsgrößen mit Hilfe einer Ortskurve ermitteln:

Die folgende Abbildung gibt die Ortskurve eines Körpers **12** in einem t-s-Diagramm wieder.
Entnehmen Sie diesem Diagramm geeignete Punkte und
bestimmen Sie mit diesen rechnerisch die Größen x_0, v_0 und a und
geben Sie die Ortsgleichung mit eingesetzten Werten **an**:

→ **Die Berechnungen führen Sie auf einem separaten Blatt aus. In dieses karierte Feld (rechts) fügen Sie nur die wesentlichen Teile Ihrer Berechnungen (z.B. Ansatz, wichtige Zwischenergebnisse, Wertetabellen, Ergebnisse) ein.**

Die folgende Abbildung gibt die Ortskurve eines Körpers **12** in einem t-s-Diagramm wieder. **Entnehmen Sie** diesem Diagramm geeignete Punkte und **bestimmen Sie** mit diesen rechnerisch die Größen x_0, v_0 und a und **geben Sie** die Ortsgleichung mit eingesetzten Werten **an**:

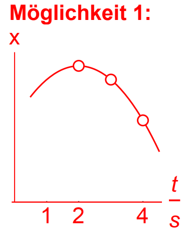
Sie haben mehrere Möglichkeiten, dem t-x-Diagramm geeignete Puntke zur Bestimmung der gesuchten Größen zu entnehmen. Im Folgenden sind **zwei dieser Möglichkeiten** behandelt:

Lösung zu 12

Achtung: Bei dieser Aufgabe gibt es mehrere Lösungsmöglichkeiten !

Möglichkeit 1: Sie wählen **drei verschiedene Punkte** aus der Kurve aus und bestimmen daraus 3 Gleichungen:

Skizze zu Möglichkeit 1:



Beispiel: $x_{11}(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \rightarrow$

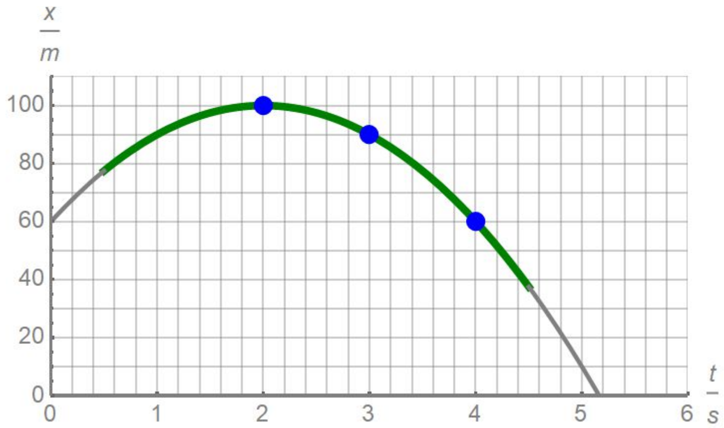
$$x_{11}(2s) = x_0 + v_0\,2s + \tfrac{1}{2}\,a\,(2s)^2 = x_0 + 2\,v_0\,s + 2\,a\,s^2 = 100\text{ m} \qquad \text{I}$$

$$x_{11}(3s) = x_0 + v_0\,3s + \tfrac{1}{2}\,a\,(3s)^2 = x_0 + 3\,v_0\,s + \tfrac{9}{2}\,a\,s^2 = 90\text{ m} \qquad \text{II}$$

$$x_{11}(4s) = x_0 + v_0\,4s + \tfrac{1}{2}\,a\,(4s)^2 = x_0 + 4\,v_0\,s + 8\,a\,s^2 = 60\text{ m} \qquad \text{III}$$

Lösung des linearen Gleichungssystemes: $x_0 = 60\,m,\ v_0 = 40\,\frac{m}{s},\ a = -20\,\frac{m}{s^2} \rightarrow$

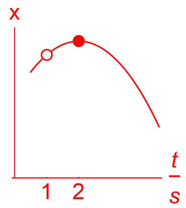
$$\underline{\underline{x_{11}(t) = 60\,m + 40\,\tfrac{m}{s}\,t - \tfrac{1}{2}\,20\,\tfrac{m}{s^2}\,t^2}}$$



← Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Möglichkeit 2: Sie wählen den **Scheitelpunkt** und einen **weiteren Punkt** aus der Kurve aus und bestimmen daraus 3 Gleichungen:

Skizze zu Möglichkeit 2:



Beispiel: $x_{11}(t) = x_0 + v_0\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2 \quad \rightarrow$

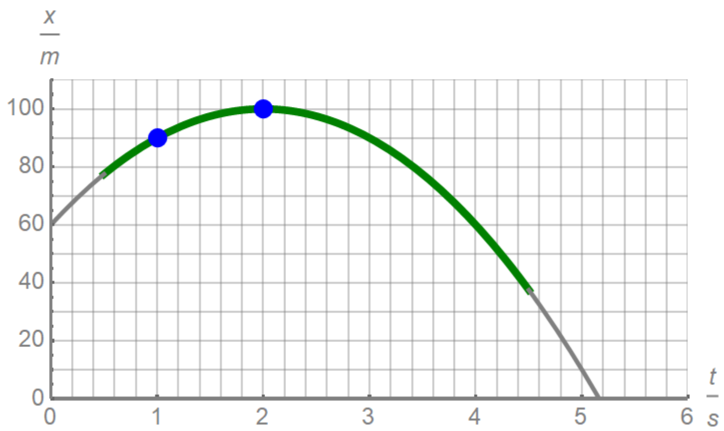
$$x_{11}(1s) = x_0 + v_0\,1s + \tfrac{1}{2}\,a\,(1s)^2 = x_0 + 1\,v_0\,s + \tfrac{1}{2}\,a\,s^2 = 90\text{ m} \qquad \text{I}$$

$$x_{11}(2s) = x_0 + v_0\,2s + \tfrac{1}{2}\,a\,(2s)^2 = x_0 + 2\,v_0\,s + 2\,a\,s^2 = 100\text{ m} \qquad \text{II}$$

$$\textbf{Scheitelstelle } x_S = \frac{-B}{2\,A} = \frac{-v_0}{a} = 2 \rightarrow 2\,a + v_0 = 0 \qquad \text{III}$$

Lösung des linearen Gleichungssystemes $\rightarrow \underline{\underline{x_{11}(t) = 60\,m + 40\,\tfrac{m}{s}\,t - \tfrac{1}{2}\,20\,\tfrac{m}{s^2}\,t^2}}$

Die Lösungen von Möglichkeit 1 und Möglichkeit 2 sind natürlich identisch!



← Graphik links **nicht** in Aufgabenstellung gefragt

Reflexion:

Sie haben das Lernprogramm „Konstant beschleunigte Bewegungen und quadratisch Gleichungen“ abgeschlossen. Auf dieser Seite sollen Sie für sich selber aufschreiben, wo Sie einen **Lernerfolg** für sich verbuchen und wo Sie **Bedarf nach Wiederholung** sehen.

Schauen Sie sich diese letzte Seite nochmals an, wenn Sie ···

- diesen Stoff für eine spätere Unterrichtseinheit nochmals benötigen
- sich auf eine Prüfung vorbereiten

Beantworten Sie die Fragen in ganzen freien Sätzen.

Was habe ich in diesem Lernprogramm **gelernt**?

Was muss ich nochmals **wiederholen**?

Wann brauche ich im Physik-Unterricht **das** hier erworbene **Wissen nochmals** ?

Schauen sich hierzu die Datei `Flow-BOS.pdf` (BOS-Zweig) oder `Flow-BOS.pdf` (FOS-Zweig) auf der *website* `www.jaegersalz.de` (→`Physik`) an.

Wann und wie werde ich das in diesem Lernprogramm behandelte **Thema nochmals wiederholen**?

Tip:
Erstellen Sie für sich einen Lernplan!